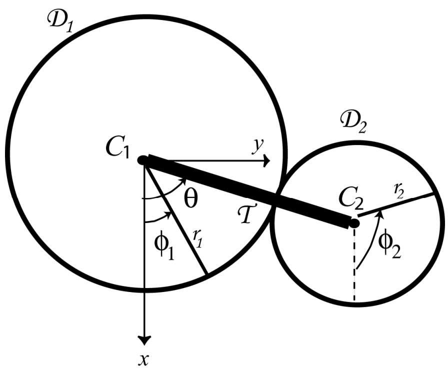
Contrôle terminal de Mécanique des solides

Session 2 – Durée 1h30

L'usage des calculatrices et des téléphones portables est interdit.

Problème 1: Mouvement de deux disques en contact

On étudie le mouvement, par rapport à un référentiel R = ($Oxyz$), d'un système matériel constitué de deux disques homogènes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, assujettis à se déplacer dans le **plan vertical** ($0xy$) et maintenus en contact **au point *I*** grâce à une tige homogène $\mathcal{T}$ reliant leurs centres C_1 et C_2 (cf. Figure 1). Ces disques de rayon r_1 et r_2, sont mobiles autour de leur axes **horizontaux**, respectivement (C_1z) et (C_2z). On désigne par ϕ_1 l'angle que fait un rayon du disque $\mathcal{D}_1$ avec (Ox), par ϕ_2 l'angle que fait un rayon du disque $\mathcal{D}_2$ avec (Ox) et par θ l'angle que fait la tige $\mathcal{T}$ avec (Ox). On note m_1, m_2 et m_T, respectivement les masses des disques $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et de la tige $\mathcal{T}$ et g la norme de l'accélération de la pesanteur.
Le référentiel $\mathcal{R}$ choisi est tel que son origine O coïncide avec C_1, centre du disque $\mathcal{D}_1$. Dans tout le problème, on négligera l'interaction de la tige $\mathcal{T}$ avec les disques $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.



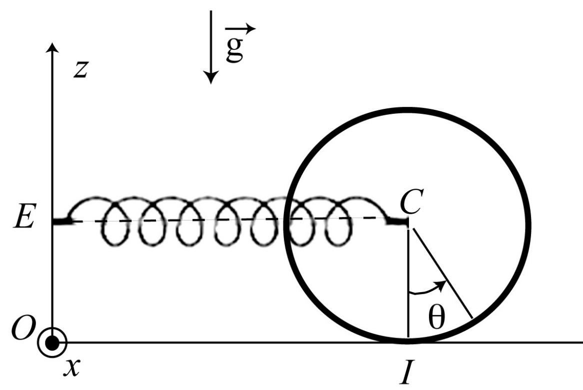
1) Exprimer, dans la base appropriée, la vitesse du centre C_2 de $\mathcal{D}_2$ par rapport à R. En déduire la vitesse du point de contact entre les solides $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_1$, noté I_2, appartenant à $\mathcal{D}_2$.
2) En déduire l'expression de la vitesse de glissement $\vec{v}_g$ de $\mathcal{D}_2$ sur $\mathcal{D}_1$, en fonction de $\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dot{\theta}$, r_1 et r_2, puis la relation de roulement sans glissement.

On considère, dans tout ce qui suit que le disque $\mathcal{D}_1$ est immobilisé.

3) Que devient la relation de roulement sans glissement établie en 2) ?
4) Déterminer le moment d'inertie du disque $\mathcal{D}_2$ par rapport à l'axe (C_2 z). En déduire le moment cinétique en C_2 de $\mathcal{D}_2$.
5) En utilisant le théorème de Koenig, déterminer le moment cinétique en I de $\mathcal{D}_2$ par rapport à $\mathcal{R}$. Donner son expression en fonction de $\dot{\theta}$.
6) **HORS BAREME** : En appliquant le théorème du moment cinétique à $\mathcal{D}_2$ en I, montrer que θ vérifie l'équation suivante : $\ddot{\theta}+\frac{2}{3}\frac{g}{r_1+r_2}\sin\theta=0$

Problème 2 : Etude du mouvement d'un cerceau relié à un ressort

Dans un référentiel terrestre $R(Oxyz)$, on étudie le mouvement d'un cerceau homogène (C) de masse m, de rayon a, de centre C, d'axe de révolution (Cz) et de moment d'inertie par rapport à cet axe $J = ma^2$.
Le cerceau qui roule **sans glisser** le long de l'axe (Oy) est relié en C à un ressort de masse négligeable et de raideur k, l'autre extrémité du ressort E étant fixe de sorte que EC soit toujours horizontal (voir figure).
La rotation du cerceau est repérée par l'angle $\theta(t)$.
On note y l'abscisse de C suivant Oy, et Y son abscisse mesurée à partir de la longueur à vide du ressort.
Le coefficient de frottement entre le sol et le cerceau est μ supposé identique en régime statique et dynamique. L'action de contact en I est caractérisée par la résultante $\vec{R} = T\vec{e}_y + N\vec{e}_z$.



1. Ecrire la condition de roulement sans glissement en I.

2. En déduire la relation existant entre $\dot{Y}$ et $\dot{\theta}$.

3. Donner l'expression de l'énergie cinétique ε_k du cerceau en fonction de $\dot{Y}$.

4. Donner, à une constante près que l'on ne déterminera pas, l'expression, en fonction de Y, de l'énergie potentielle ε_p du cerceau.
On rappelle que l'énergie potentielle élastique est donnée par : $\varepsilon_p = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2$ *où* Δl *est l'allongement du ressort.*

5. Que dire de l'énergie mécanique ? Justifier.

6. En déduire l'équation différentielle à laquelle obéit $Y(t)$. On posera $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

7. Sachant qu'à $t = 0$, le cerceau est sans vitesse, et $Y(t) = Y_0$, déterminer $Y(t)$.

8. En appliquant le théorème du centre de masse, donner les équations satisfaites par T et N.

9. **HORS BAREME** : En appliquant les lois de Coulomb sur le frottement solide, montrer que le roulement s'effectue sans glissement à $t = 0$, si, $Y_0 < Y_1$ étant à déterminer en fonction de μ, g et ω_0.